Заседание научно-исследовательского семинара

Логического центра ИФ РАН

26 апреля 2012 года – 16.00

Леонид Юрьевич Девяткин

Эквивалентность матриц по отношению логического следования

Аннотация доклада:

Рассмотрим две произвольные логические матрицы A и B для некоторого пропозиционального языка L.

Можно построить произведение данных матриц A*B, в котором базовые операции определяются покомпонентно на основе операций из A и B. Множеством значений в A*B окажется множество пар <x, y>, где x есть значение из A и y – значение из B.

Пусть значение z = <x, y> в A*B является выделенным, е.т.е. x есть выделенное значение в A и y есть выделенное значение в B. Пусть z является анти-выделенным в A*B, е.т.е. x не есть выделенное значение в A и y не есть выделенное значение в B.

В матрице, содержащей классы выделенных и анти-выделенных значений можно определить четыре отношения логического следования:

(1). t-следование: если все посылки принимают выделенное значение, то заключение принимает выделенное значение;

(2). f-следование: если ни одна посылка не принимает анти-выделенное значение, то заключение не принимает анти-выделенное значение;

(3). p-следование: если все посылки принимают выделенное значение, то заключение не принимает анти-выделенное значение;

(4). q-следование: если ни одна посылка не принимает анти-выделенное значение, то заключение принимает выделенное значение.

Пусть C = <Γ, B> есть множество пар, таких, что Γ есть множество L-формул, B есть L-формула, и B логически следует из Γ. Пусть T есть класс L-формул, которые следуют логически из любого (в том числе пустого) множества посылок.

Ясно, что A, B, A*B(t), A*B(f), A*B(p), A*B(q) задают собственные классы C и T. Имеет место следующее.

(1). Имеет место порядок по включению над C(A*B(t)), C(A*B(f)), C(A*B(p)), C(A*B(q)), причем C(A*B(p)) есть максимум, C(A*B(q)) есть минимум, а C(A*B(t)) и C(A*B(f)) суть несравнимые промежуточные элементы;

(2). Имеет место порядок по включению над C(A), C(B), C(A*B(p)), C(A*B(q)). C(A*B(p)) снова оказывается максимумом, C(A*B(q)) – минимум, а C(A) и C(B) суть несравнимые промежуточные элементы;

(3). Имеет место порядок по включению над T(A), T(B), T(A*B(t)), T(A*B(f)). T(A*B(f)) есть максимум, T(A*B(t)) есть минимум, T(A) и T(B) суть несравнимые промежуточные элементы;

(4). T(A*B(t)) = T(A*B(q)), T(A*B(f)) = T(A*B(p)).

Таким образом, системы <L, A>, <L, B>, <L, A*B(t)>, <L, A*B(f)>, <L, A*B(p)>, <L, A*B(q)> образуют шестиэлементную бирешетку с порядками по включению классов T и F.

Отсюда вытекает, что T(A) = T(B), е.т.е. T(A*B(t)) = T(A*B(f)), и C(A) = C(B), е.т.е. C(A*B(p)) = C(A*B(q)). Это позволяет построить эффективную процедуру для проверки эквивалентности матриц по классам C и T. Для класса T (в формулировке, отличной от предложенной автором доклада) такая процедура построена Я. Калицким. Опишем аналогичную процедуру для класса C.

Определим еще одно отношение логического следования следующим образом: из Г s-следует B, е.т.е. из Г q-следует B или из Г не p-следует B. C(A) = C(B), е.т.е. любая формула B s-следует из любого множества посылок Г. Таким образом, для установления, имеет ли место C(A) = C(B), достаточно убедиться, что каждая формула s-следует из каждой в A*B.

Для произвольной логической матрицы M верно следующее. Если утверждение «каждая формула следует из каждой» справедливо для всех формул, содержащих не более пропозициональных переменных, чем имеется истинностных значений в множестве-носителе M, то данное утверждение верно для всех формул.

Существует алгоритм построения конечного класса формул, в котором перечислены все возможные оценки формул с числом попарно различных переменных, не превышающим число истинностных значений в A*B.

Таким образом, C(A) = C(B), е.т.е. каждая формула s-следует из каждой в предложенном выше классе.